На правах рукописи

Шамин Роман Вячеславович

МОДЕЛИРОВАНИЕ АНОМАЛЬНО БОЛЬШИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ОКЕАНЕ

25.00.28 — океанология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте океанологии им. П.П. Ширшова РАН

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН **Владимир Евгеньевич Захаров**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Сергей Константинович Гулев** Учреждение Российской академии наук Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
	доктор физико-математических наук **Михаил Абрамович Соколовский** Учреждение Российской академии наук Институт водных проблем РАН
	доктор физико-математических наук **Юлия Игоревна Троицкая** Учреждение Российской академии наук Институт прикладной физики РАН
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Институт вычислительных технологий Сибирского отделения РАН

Защита состоится «_____» ____________________ 2011 г. в __________ часов на заседании Диссертационного совета Д 002.239.02 при Учреждении Российской академии наук Институте океанологии им. П.П. Ширшова РАН по адресу: 117997, г. Москва, Нахимовский пр., 36
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИО РАН.
Автореферат разослан «_____» ____________________ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 002.239.02,
кандидат физико-математических наук А.И. Гинзбург

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Настоящая работа посвящена поверхностным волнам аномально большой амплитуды, так называемым волнам-убийцам. Под волнами-убийцами понимают внезапно возникающие одиночные волны огромной (до 30 м) амплитуды. Само название «волна-убийца» происходит из того, что эти волны приводят к крушениям морских судов, в том числе и с человеческими жертвами, разрушениям морских платформ, а также береговых сооружений. В англоязычной литературе такие волны обычно называют «Freak waves» или «Rogue waves», чем подчеркивается нерегулярность и опасность этого явления в океане. Единого определения волн-убийц не существует. В настоящей работе используется определение, общепринятое в современных работах, посвященных волнам-убийцам [10]. Это определение основано на амплитудном критерии, согласно которому волна-убийца — это такая волна, амплитуда которой более чем в два раза превышает значительную высоту волн в данном районе.

По нашему мнению, главной целью исследования волн-убийц является разработка методов прогноза аномально больших волн в океане. Изучение статистики возникновения этих волн позволит подойти к проблеме районирования акватории Мирового океана по уровню опасности возникновения экстремально больших волн. Необходимо также описать физические механизмы возникновения волн-убийц и построить адекватные модели, описывающие динамику этих волн. Наличие динамического описания такого явления, как волны-убийцы, необходимо для вычисления количественных параметров аномальных волн, что является основным для разработки новых норм безопасности строительства кораблей и морских платформ.

Поскольку феномен волны-убийцы является относительно редким и непредсказуемым, то натурное изучение этих волн весьма затруднительно. С другой стороны, и лабораторные исследования аномально больших волн тоже имеют большие ограничения. Поэтому в последнее время все более актуальным становятся теоретические исследования. Поскольку мы имеем дело с существенно нелинейным физическим процессом, то проведение аналитических исследований является крайне сложной задачей. *Таким образом, основным средством изучения волн-убийц становится вычислительный эксперимент.*

В настоящее время существуют фотографии и инструментальные записи фактов возникновения поверхностных волн аномально большой амплитуды — волн-убийц. Однако наше представление об этих волнах базируется в основном на отдельных случаях [4,5,11]. В то же время, по данным С.К. Гулева и В.Г. Григорьевой (2004) [27], существует значительная межгодовая изменчивость ветрового волнения. В частности, в некоторых районах Мирового океана обнаруживается рост интенсивности штормовых волн. В связи с этим вопрос о связи вероятности таких аномальных событий, как волны-убийцы, с характеристиками поля ветрового волнения приобретает большое значение.

Изучение поверхностных ветровых волн сопряжено с известными трудностями, связанными со сложностью и большой разнообразностью физических явлений на поверхности океана. Изучению ветровых волн посвящено большое количество фундаментальных работ таких авторов, как И.Н. Давидан, В.Е. Захаров, С.А. Китайгородский, В.П. Красицкий, И.В. Лавренов, М.С. Лонге-Хиггинс, А.С. Монин, О.М. Филлипс, К. Хассельман и др. Современные теории ветрового волнения, основанные на статистических подходах, позволяют получить закономерности развития волнения в среднем. Важную роль при этом играют и эмпирические зависимости роста волнения (Г.С. Голицын (2010) [1]), связь которых с современными теоретическими представлениями удалось установить совсем недавно (С.И. Бадулин, А.В. Бабанин, Д. Ресио, В.Е. Захаров (2007) [20]). Однако при статистическом описании волнения не учитывается информация о конкретной форме поверхности, а волны-убийцы представляют собой индивидуальное событие с нехарактерным профилем волны. Поэтому аномально большие волны (волны-убийцы), очевидно, не могут быть описаны в рамках статистического подхода. Необходимо обращение к нелинейным уравнениям, описывающим динамику поверхностных волн.

Для решения принципиальной проблемы прогноза волн-убийц необходимо иметь строгое обоснование нелинейных математических моделей, описывающих поверхностные волны на больших временных интервалах вплоть до обрушения, и эффективные численные методы расчета динамики волн на воде. В настоящей диссертации предложена целостная математическая теория на основе нелинейных уравнений, позволяющая вычислять вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начального волнения и вопросы устойчивости волн-убийц относительно внешних воздействий. В рамках этой теории разработаны эффективные численные методы для расчета поверхностных волн в океане. Дано доказательство сходимости этих методов, а также получены важные для практического применения результаты о регуляризации вычислительных процедур в условиях машинной точности. Полученные математические результаты применяются для организации масштабных вычислительных экспериментов по моделированию поверхностных волн с целью получения большого массива расчетных данных необходимых для изучения волн-убийц.

Цель работы. Целью настоящей работы является получение оценок вероятности возникновения волн-убийц в океане с помощью численного моделирования на основе строгой математической теории. Основные задачи работы: (1) показать корректность математической модели поверхностных волн вплоть до момента обрушения; (2) разработать математические основы для проведения доказательных вычислений в моделировании волн на воде; (3) рассмотреть вопросы сходимости численных методов для приближенных расчетов поверхностных волн в океане, а также методы регуляризации вычислительных процедур в условиях машинной точности; (4) провести вычислительные эксперименты с большой точностью и исследовать статистические характеристики волн-убийц; (5) установить устойчивость решений, описывающих поверхностные волны экстремальной амплитуды; (6) дать теоретико-игровую трактовку нелинейной динамики волн-убийц.

Методы исследования. Для решения поставленных задач были использованы современные методы вычислительной математики, теории дифференциальных уравнений в частных производных, математической гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью, теории вероятности и математической статистики, а также авторская методика изучения эволюционных функционально-дифференциальных уравнений. Работа базируется на уравнениях динамики поверхностных волн в конформных переменных, выведенных в работе Л.В. Овсянникова, а затем использованных в работах А.И. Дьяченко, В.Е. Захарова, В.П. Рубана, Д.В. Чаликова и др. Мы используем аналогичные уравнения из работы [6].

Научная новизна. Изучение волн-убийц с помощью моделирования полных нелинейных уравнений (в том числе и в конформных переменных) проводилось в ряде работ $[22, 24, 25, 31]$. Научная новизна данной работы состоит в том, что волны-убийцы изучаются с использованием строго доказанных математических методов, а также в оригинальности постановок вычислительных экспериментов. Новым также является изучение динамики волн-убийц на основе дифференциальных включений, что позволило использовать доказательные вычисления.

В математической теории нестационарных уравнений, описывающих динамику поверхностных волн на воде, научная новизна состоит в том, что уравнения были систематически исследованы не на малых временных интервалах, а на максимальных временных интервалах, на которых существует решение. В области построения и обоснования численных методов научная новизна состоит в том, что вычислительные процедуры рассматриваются в условиях машинной точности, причем эти процедуры проектируются таким образом, чтобы служить основой для проведения доказательных вычислений при моделировании динамики поверхностных волн экстремальной амплитуды. Новыми также являются методы исследования устойчивости волн-убийц по отношению к внешним возмущениям и теоретико-игровые методы интерпретации возникновения волн-убийц.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Установлена корректность точной математической модели поверхностных волн в океане вплоть до момента обрушения. Показана возможность построения доказательных вычислений для качественного и количественного исследования поверхностных волн аномально большой амплитуды.

2. Предложен новый метод построения точных решений уравнений, описывающих поверхностные волны на основе дифференциальных включений. Этот метод позволяет эффективно учитывать внешнее ветровое воздействие на нелинейную динамику поверхностных волн.

3. Доказана сходимость численных методов расчета волн на воде на основе динамических уравнений в конформных переменных. Предложен метод регуляризации этих вычислительных процедур в условиях машинной точности.

4. На основе проведенных масштабных вычислительных экспериментов получены оценки вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от средней крутизны и спектральных параметров начального волнения.

5. Установлена устойчивость (теоретическая и вычислительная) волн-убийц относительно возмущений начального волнения и внешних воздействий на свободную поверхность в процессе нелинейной динамики.

6. Предложены теоретико-игровые трактовки возникновения волн-убийц. Построена формальная игра, где в качестве игроков выступают от-

дельные волны. Для рассматриваемой игры введено понятие справедливости игры, при этом факт возникновения аномально большой волны трактуется как несправедливая игра.

Достоверность полученных результатов. Достоверность численного моделирования волн аномально большой амплитуды подтверждается сравнением результатов вычислительных экспериментов с инструментальными данными известных случаев возникновения волн-убийц. Предложенные вычислительные процедуры также проверялись на тестовых расчетах, что подтверждает их корректность при применении в вычислительных экспериментах. Достоверность математических результатов, применяемых к решению поставленных задач, подтверждается тем, что все эти результаты снабжены строгими доказательствами. Достоверность оценок вероятности возникновения волн-убийц по характеристикам волновых спектров качественно согласуется с натурными наблюдениями (Хольт М., Фуллертон Г., Ли Дж.-Г. (2004) [29]).

Научная и практическая значимость работы. Диссертационная работа носит теоретический характер и относится к области фундаментальных исследований. Теоретическая значимость основных результатов состоит в том, что предложена последовательная математическая теория моделирования поверхностных волн на основе полных нелинейных уравнений. Практическая значимость работы состоит в том, что с помощью результатов данной работы продемонстрирована возможность определять вероятность возникновения волн-убийц по параметрам морского волнения.

Публикации и вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 42-х научных работах. В том числе в монографии в издательстве «Наука», 15-ти рецензируемых журналах (из них 13 из списка ВАК), 4-х статьях в рецензируемых сборниках, 22-х тезисах конференций.

В работах [2] и [3] автору принадлежит частично постановка вычислительных экспериментов, полностью численная реализация программных комплексов, а также проведение экспериментов и обработка результатов экспериментов. В работах [15], [18], [19] автору принадлежит идея статей, математическое обоснование применяемых методов, а также интерпретация результатов экспериментов. Все остальные работы выполнены без соавторов.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы излагались: на Ученом совете в Институте океанологии им П.П. Ширшова РАН, на Ученом совете Физического направления Института океанологии им П.П. Ширшова РАН, на Научных сессиях Совета РАН по нелинейной динамике; в Институте вычислительных технологий СО РАН (Новосибирск) под руководством академика Ю.И. Шокина, В.М. Ковеня; в Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск) под руководством В.В. Пухначева; в Институте Альфреда Вегнера полярных и морских исследований (Бремергафен, Германия); на семинаре в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН под руководством С.Ю. Доброхотова, в Институте вычислительной математики РАН на семинаре под руководством Г.М. Кобелькова, В.И. Лебедева, А.В. Фурсикова, на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова: под руководством М. С. Аграновича и М. И. Вишика и семинаре под руководством академика В.В. Козлова и член-корреспондента Д.В. Трещева; в Московском авиационном институте на семинаре под руководством Г. А. Каменского и А. Л. Скубачевского, а также на семинаре под руководством П. С. Красильникова; на семинаре в Российском университете дружбы народов под руководством А. Л. Скубачевского; на семинаре в Московском энергетическом институте под руководством Ю.А. Дубинского; в Свободном университете Берлина (Берлин, Германия); в Университете Гумбольдта (Берлин, Германия); в Институте Вейерштраса прикладного анализа и стохастики (Берлин, Германия).

А также на конференциях: «Асимптотические методы и математическая физика», Москва, 2010; Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего, 2009; The Fifth International Workshop «SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE: Achievements, Developments and Perspectives» CHERNOGOLOVKA, Moscow region, 2009; International Conference «Control and Optimization of Dynamical Systems CODS-2009», Tashkent, Uzbekistan, 2009; Итоговой конференции по результатам реализации Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные проблемы океанологии: физика, геология, биология, экология» Москва, 2008; The Fifth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Abstracts. Moscow, 2008; 3-й Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых, Бийск, 2008; Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Москва 2008; Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2008. Воронеж, 2008; Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф. Барнаул, 2007; International

Conference «Nonlinear partial differential equations». Yalta, Crimea, Ukraine, 2007; Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». Москва, 2007; International Conf. «Differential Equations and Related Topics» dedicated to I.G. Petrovskii, Moscow 2007; IUTAM Symposium «Hamiltonian dynamics, Vortex structures, Turbulence». Moscow, 2006; International Conference «Tikhonov and contemporary mathematics» Moscow, Russia, 2006; International Conference «Mathematical Hydrodynamics» Moscow 2006; Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2006; International Conference «Nonlinear partial differential equations». Alushta, 2005; Fourth International Conference on Differential and Functional-Differential Equations, Moscow, Russia, 2005.

Структура диссертации. Диссертация состоит из Введения, четырех глав, Заключения и списка используемой литературы.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность руководителю и вдохновителю работы — академику Владимиру Евгеньевичу Захарову и своему первому учителю — профессору Александру Леонидовичу Скубачевскому. Автор также благодарит своих коллег — сотрудников Лаборатории нелинейных волновых процессов ИО РАН: С.И. Бадулина, В.В. Геогджаева, Н.Г. Кожелупову, Б.Н. Филюшкина, В.И. Шриру и преподавателей кафедры дифференциальных уравнений и математической физики РУДН: М.Е. Боговского, Е.М. Варфоломеева, П.Л. Гуревича, Л.Е. Россовского, В.Ж. Сакбаева, М.Ф. Сухинина, а также А.И. Дьяченко, Г.А. Каменского, А.С. Левина, И.А. Малиновскую, А.И. Смирнову, Д.В. Сошникова.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении дано обоснование актуальности и научной новизны темы диссертации, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, перечислены основные результаты диссертации, а также рассмотрена структура диссертации.

Первая глава является вводной. В этой главе приводятся наиболее известные описания волн-убийц в Мировом океане. Дается обзор различных подходов к изучению волн-убийц.

Результаты численного расчета сравниваются с известными инструментальными записями волн-убийц. Одним из наиболее известных случаев инструментальной записи волны-убийцы является регистрация на норвежской нефтяной платформе 1 января 1995 года в Северном море (56.5° с.ш., 3.2° в.д.) аномальной волны, получившей название Новогодней волны. На рис. 1 приведем волнограмму этой волны из работы [30], график 1.4.(b). А на рис. 2 приведем волнограмму из одного численного опыта входившего в серию вычислительных экспериментов, описанную в четвертой главе диссертации.

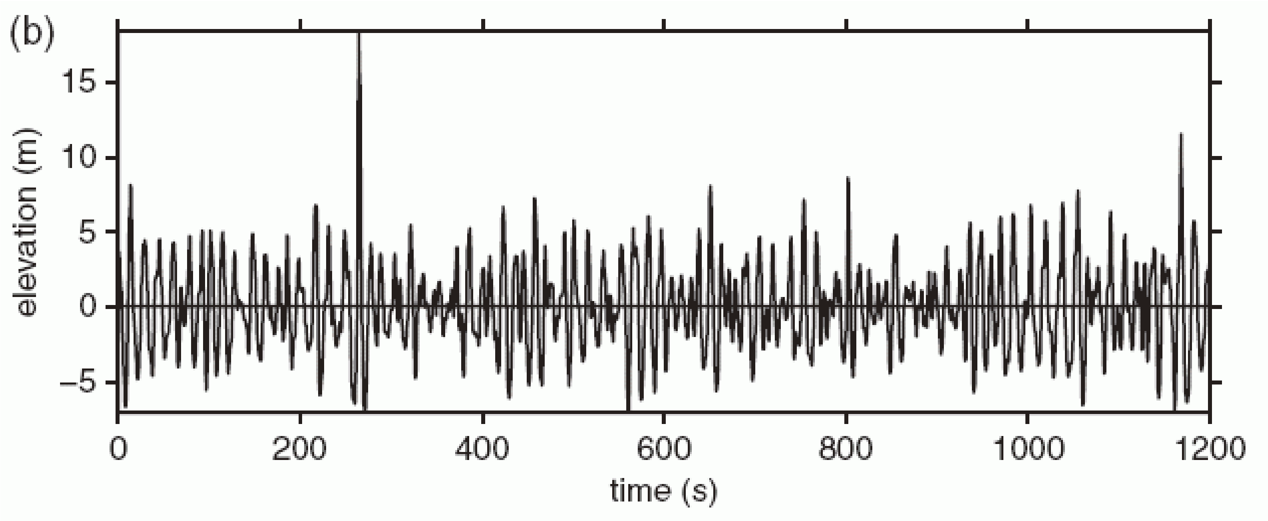

Рис. 1. Волнограмма Новогодней волны из работы [30].

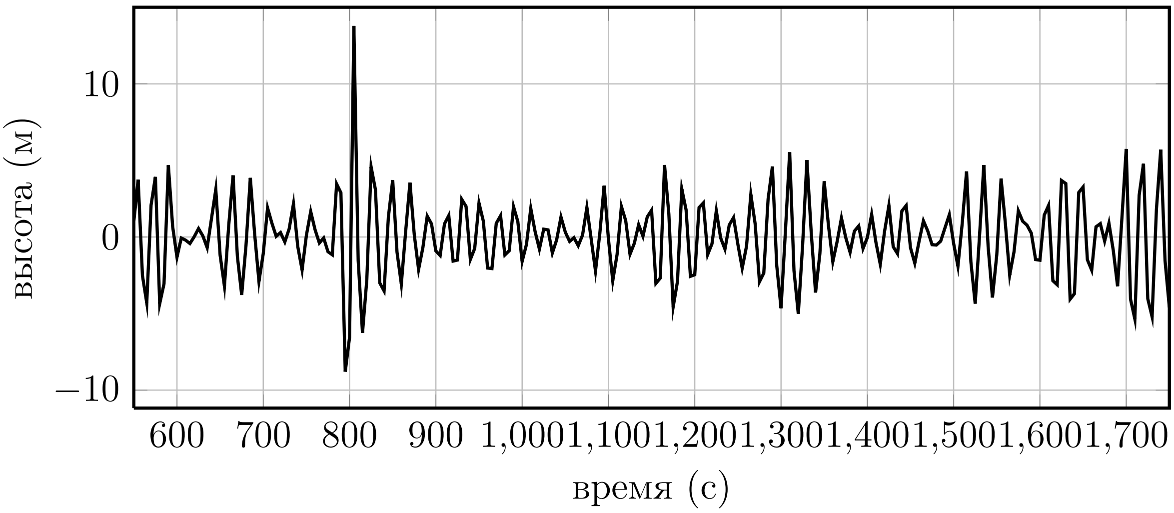

Рис. 2. Волнограмма численного эксперимента

В цитированной выше работе также приведен подробный график волнограммы этой волны, который мы воспроизводим на рис. 3. Приведем аналогичный график из результатов численного эксперимента на рис. 4.

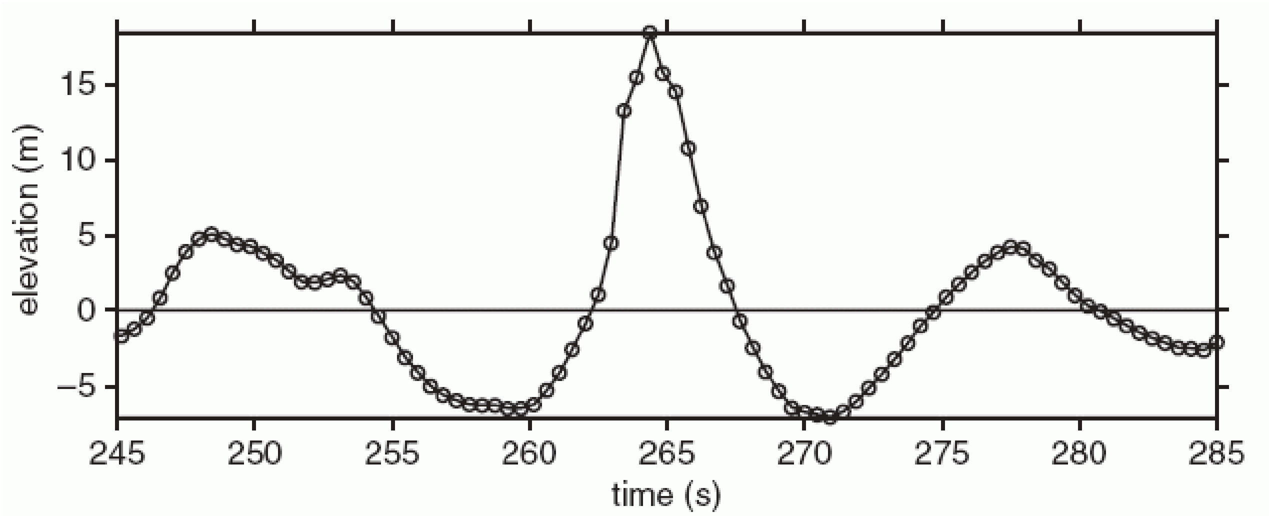

Рис. 3. Подробная волнограмма Новогодней волны [30].

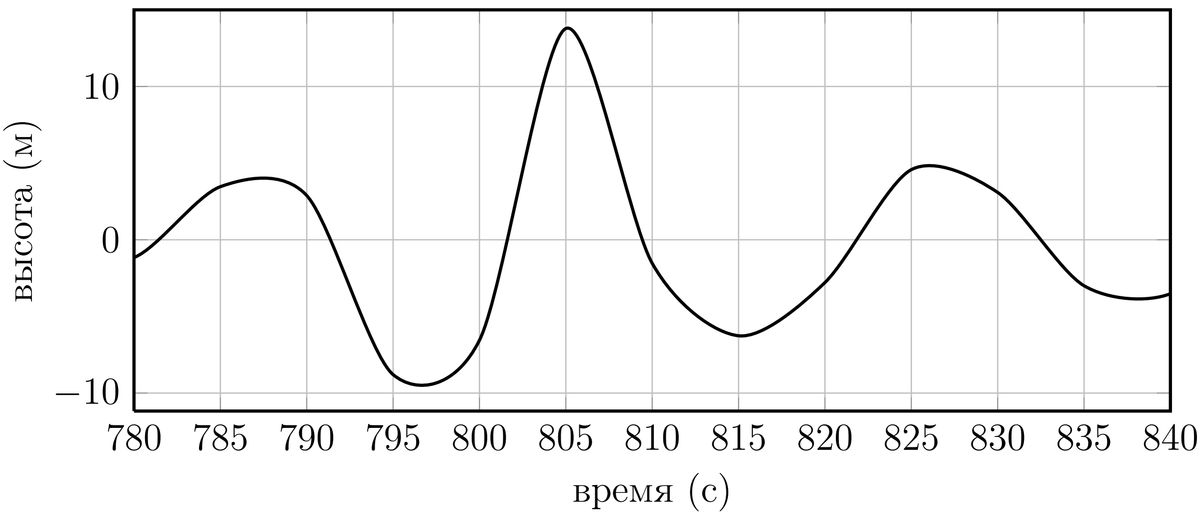

Рис. 4. Подробная волнограмма численного эксперимента

Сравнивая эти графики, мы видим качественное совпадение результатов численного моделирования и натурных данных. В тексте диссертации также приведены и другие примеры качественного совпадения результатов численного моделирования и известных инструментальных записей волн-убийц.

Во второй главе исследуются нелинейные уравнения, описывающие поверхностные волны в океане. В этой главе строятся основы математической теории для проведения вычислительных экспериментов по моделированию волн-убийц. Рассматриваются эволюционные уравнения, описывающие динамику идеальной жидкости со свободной границей в конформных переменных. Использование конформных преобразований в задачах гидродинамики идеальной потенциальной жидкости является традиционным, однако в данной работе используется конформные переменные для нестационарных уравнений. Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$R_t = i(UR_u - U_u R), \tag{1}$$

$$V_t = i(UV_u - B_u R) + g(R - 1), \tag{2}$$

где $U = \mathrm{P}(V\overline{R} + \overline{V}R)$, $B = \mathrm{P}(V\overline{V})$, $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{I} + i\mathrm{H})$, H — сингулярный интегральный оператор Гильберта, g — ускорение свободного падения. Система (1)–(2) представляют собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Неизвестными в этой системе являются функции $R(t, u)$, $V(t, u)$, знание которых позволяет в точности восстановить профиль свободной поверхности и потенциал скоростей.

При рассмотрении вопросов развития морского волнения необходимо учитывать внешнее воздействие на свободную поверхность. Согласно физическому смыслу функций R и V, учесть внешнее воздействие можно с помощью дополнительных слагаемых в правой части уравнений (1)–(2). При этом не только воздушные потоки воздействуют на морскую поверхность, но и движение жидкости также воздействует на окружающие воздушные массы. Однако рассмотрение совместных уравнений для описания динамики жидкости и воздух является довольно сложным, такие уравнения рассматривались, например, в работе Д.В. Чаликов, С.Е. Раинчик

(2010) [23]. В настоящей работе в качестве правых частей уравнений (1)–(2) используются функционалы, зависящие от значений функций R и V в предшествующие моменты времени. Такой подход позволяет теоретически охватить большое количество вариантов взаимодействия жидкости и воздуха. В итоге получается система функционально-дифференциальных уравнений с последействием.

Доказано существование решений на максимальном временном интервале, на котором это решение удовлетворяет таким естественным физическим условиям, как непрерывность и отсутствие самопересечения свободной поверхности. Этот результат позволяет ответить на вопрос о том, как разрушаются решения уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости. Решения «заканчивают свою жизнь» после наступления одного из следующих обстоятельств: профиль свободной поверхности теряет свойство непрерывности и/или образуется самопересечение профиля свободной поверхности.

Для построения методов конструктивного исследования поверхностных волн в океане при наличии внешних ветровых воздействий предложена методика аппроксимации исходных уравнений эволюционными дифференциальными включениями.

Третья глава посвящена методам проведения вычислительных экспериментов в моделировании поверхностных волн в океане. Наиболее эффективным методом решения этой системы эволюционных уравнений является проекционный или спектральный метод, основанный на редукции уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказана сходимость численных схем, а также решена сложная задача о преодолении вычислительной неустойчивости, возникающей при решении систем дифференциальных уравнений большой размерности. Предложен новый эффективный метод регуляризации вычислительной процедуры в условиях машинной арифметики. Показано, что этот метод является одним из видов регуляризации некорректных задач, и доказана его сходимость. Суть метода состоит в том, чтобы «обрезать» бесконечные ряды Фурье не по номеру гармоник, а обнулять те коэффициенты Фурье, которые по модулю меньше некоторого порогового значения. В этой главе показано также, что с помощью численных схем возможно конструктивно определять временной интервал, на котором существует решение, обладающее заданными свойствами.

Теоретические результаты продемонстрированы на примерах различных режимов динамики поверхностных волн на воде. Рассматриваются бегущие волны, пример обрушивающейся волны, волны Фарадея, а также режим неустойчивости Рэлея-Тейлора.

Четвертая глава полностью посвящена поверхностным волнам аномально большой амплитуды, так называемым волнам-убийцам.

Рассмотрим постановку основных вычислительных экспериментов. Начальные условия для задачи (1)–(2) определялись как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K_0 = 25$. Мы предполагали, что начальное возмущение поверхности задается суммой гармоник со случайными фазами

$$\eta_0(x) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{max}}^{\frac{1}{2}K_{max}} \phi(k - k_0)\cos(kx - \xi_k), \tag{3}$$

где K_{max} — полное число спектральных мод, ξ_k — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $-\frac{1}{2}K_{max} < k < \frac{1}{2}K_{max}$. Начальные значения поля скоростей предполагались связанными с формулами линейной теории. Функция $\phi(k)$ определялась по формуле

$$\phi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa \exp\left(-\alpha k^2\right) + \delta_k, & |k| \le K_w. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь δ_k — независимые случайные параметры, равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{max} < k < \frac{1}{2}K_{max}$. Число $1 \le K_w \le 10$ определяло спектральную ширину, κ, α — «внутренние» параметры спектра, определенные так, чтобы «внешние» параметры — квадрат средней крутизны $\mu^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \eta_x^2 dx$ и дисперсия $D = \frac{\left(\int\limits_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk\right)}{\left(\int\limits_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk\right)}$ принимали заданные значения. Вклад в полную энергию случайного шума составлял не более трех процентов.

Было проделано 5000 «элементарных» экспериментов. В каждом эксперименте время менялось до 10^4, что соответствовало приблизительно 500 периодам волн. Если происходило обрушение волн, счет прекращался досрочно. В расчетах полное число гармоник было $K_{max} = 2048$ или $K_{max} = 4096$ в зависимости от квадрата средней крутизны.

Регистрация волн-убийц производилась с помощью амплитудного критерия $\frac{H_{max}}{H_s} \ge 2.1$, где H_{max} — амплитуда самой высокой волны, а H_s — существенная высота волн, т.е. средняя амплитуда одной трети самых высоких волн. Требовалось также, чтобы локальная крутизна волны $|\eta_x|$ превышала критическое значение, т.е. было выполнено условие $\max\limits_{0<x<2\pi} |\eta_x| \ge 0.3$. Это требование вызвано физическими соображениями и является весьма существенным.

Также проводились аналогичные вычислительные эксперименты, когда в исходные уравнения были добавлены диссипативные члены

$$R_t = i(UR_u - U_u R) - \varepsilon R_{uuuu},$$
$$V_t = i(UV_u - B_u R) + g(R - 1) - \varepsilon V_{uuuu},$$

где ε — достаточно малый параметр.

На рис. 5 изображен характерный профиль волны-убийцы, а на рис. 6 приведена плотность импульса в момент образования волн-убийцы. На рис. 7 представлена эмпирическая функция вероятности времени возникновения волны-убийцы.

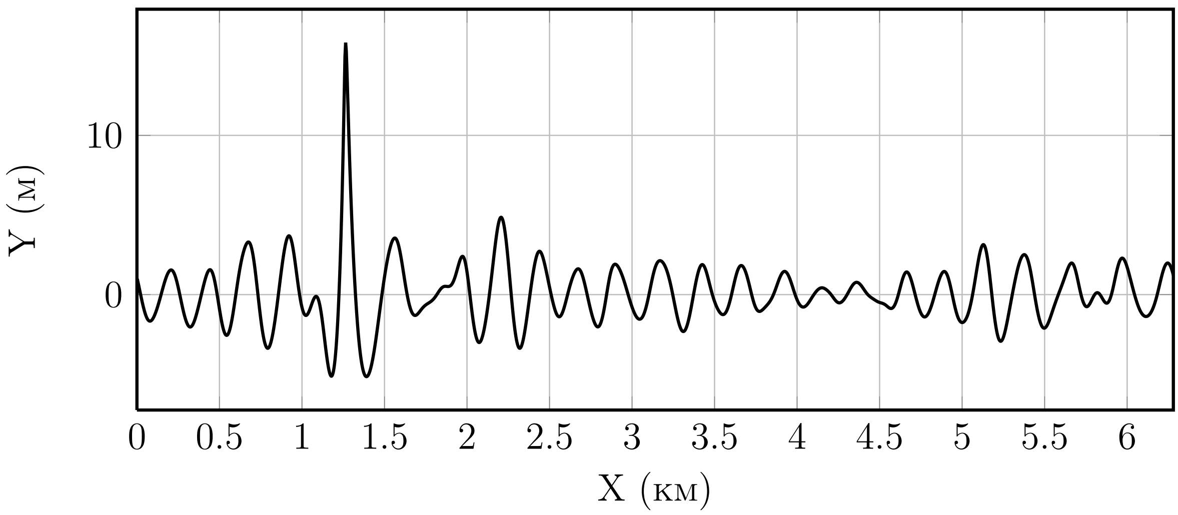

Рис. 5. Профиль волны-убийцы. Время $t = 3360$ с; крутизна — 0.558

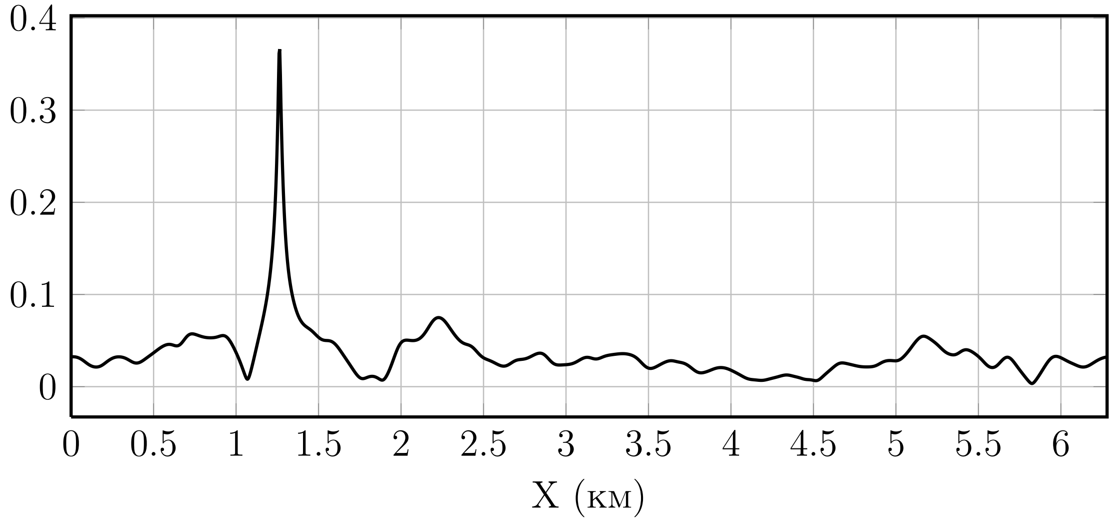

Рис. 6. Плотность импульса в момент образования волны-убийцы

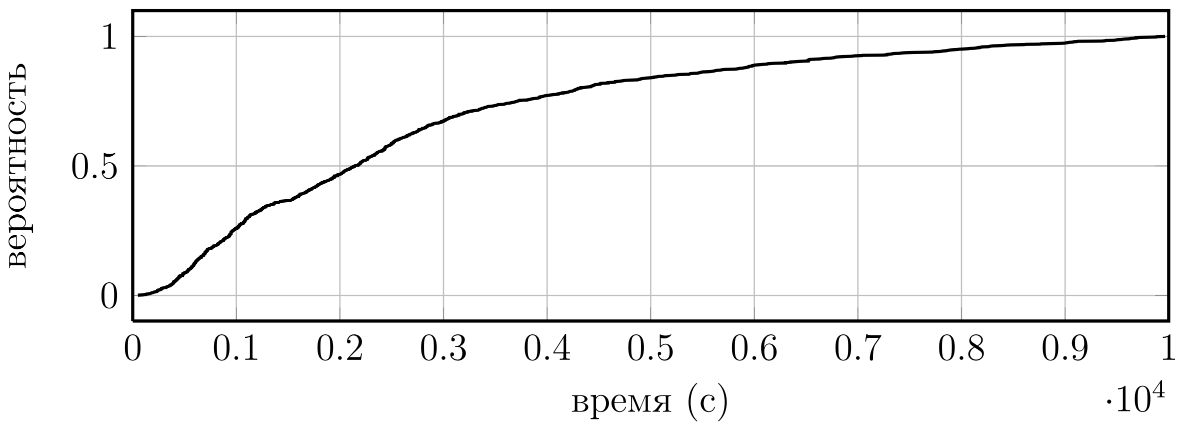

Рис. 7. Вероятность возникновения волн-убийц от времени

Поскольку волна-убийца представляет собой экстремальное явление, то возникает вопрос — будет ли эта волна устойчивой по отношению к возмущениям начального волнения и внешним возмущениям. Доказано, что эти решения являются устойчивыми к возмущению начального волнения и внешним воздействиям в функциональных пространствах, в которых рассматриваются решения уравнений. На рис. 8 приведены профиль волны-убийцы без возмущений (сплошная линия) и профиль возмущенной волны (точечная линия) в момент образования волны-убийцы. В этом эксперименте возмущение было случайной внешней силой, действующей на поверхность волны. Плотность внешней силы была следующая:

$$F_x(t,x) = A\xi_x(t)\sin(K(t)x),$$
$$F_y(t,x) = A\xi_y(t)\sin(K(t)x),$$

где $\xi_x(t), \xi_y(t)$ — независимые случайные процессы, равномерно распределенные на $[-0.5, 0.5]$, $K(t)$ — случайный процесс, принимающий значения $\{1,2,3,4,5\}$ с одинаковой вероятностью, A — положительный параметр. Хотя возмущенное решение заметно отличается от исходного решения, но

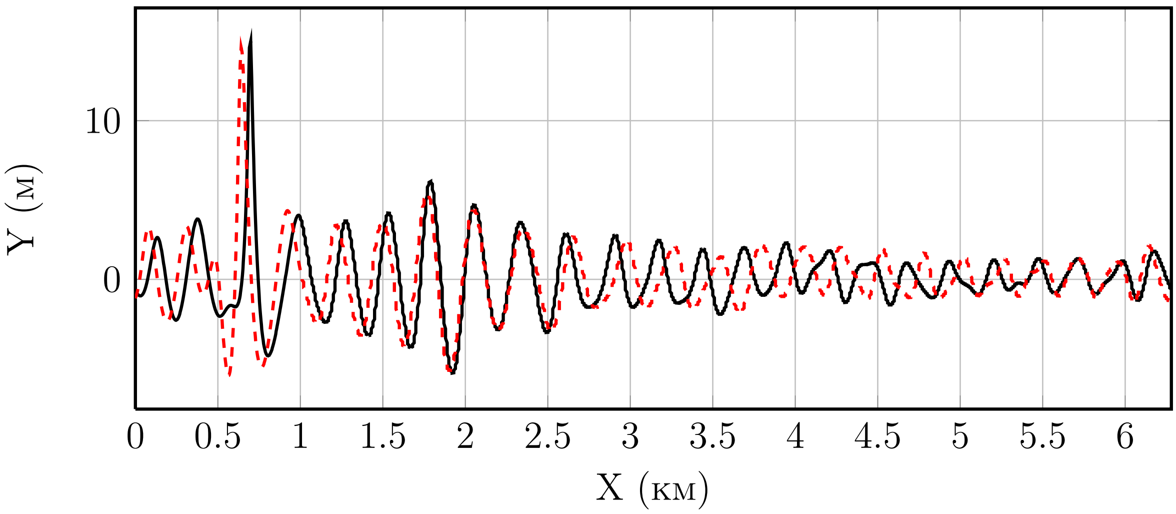

Рис. 8. Возмущение волны-убийцы

профили максимальной волны весьма похожи, и время образование волны-убийцы совпадает. Данная вычислительная устойчивость была подтверждена большим количеством вычислительных опытов.

На рис. 9 приведены вероятности возникновения волн-убийц в вычислительных экспериментах в зависимости от параметров начального волнения. В этих экспериментах использовались уравнения без диссипации. Из этого графика видно, что вероятность возникновения волны-убийцы уменьшается с ростом спектральной ширины начального волнения. Однако даже для умеренных крутизн начального волнения вероятность возникновения аномально больших волн остается значительной.

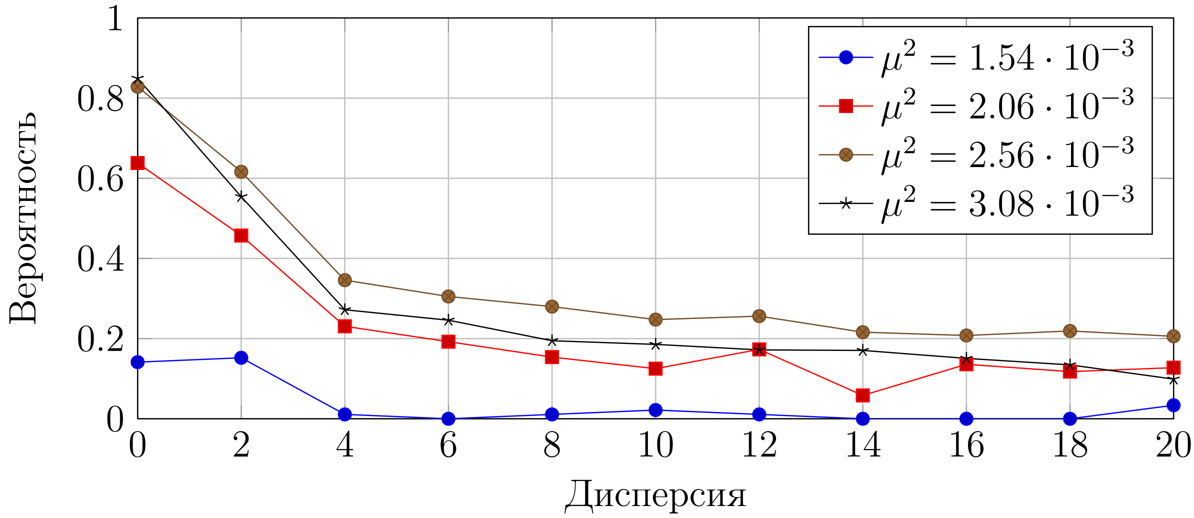

Рис. 9. Вероятности возникновения волн-убийц

Рассмотрены методы краткосрочного оперативного прогноза возникновения волны-убийцы. Метод основан на анализе изменения величин

$$H(t) = \frac{H_{max}(t)}{H_s(t)}, \quad \mu_{max}(t),$$

где $H_{max}(t)$ — максимальная амплитуда в момент времени t, а $H_s(t)$ — существенная высота волн, $\mu_{max}(t)$ — максимальная крутизна свободной поверхности в момент t. Следующие условия являются критерием для прогноза возникновения волны-убийцы:

$$\frac{H(t+\Delta) - H(t)}{\Delta} \geq \alpha, \qquad \frac{\mu_{max}(t+\Delta) - \mu_{max}(t)}{\Delta} \geq \beta,$$

где $\Delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — параметры метода. На основе анализа данных вычислительных экспериментов наилучший выбор параметров этого метода показал точность прогноза в 68.94%.

Факт возникновения волны-убийцы в ходе нелинейной динамики можно трактовать с помощью теории игр. Введем определение формальной игры в нашем случае. Пусть рассматривается динамика цуга волн при

$t \in [0, T]$. Будем считать, что на этом временном отрезке количество отдельных волн конечно и постоянно. Пусть у нас есть N волн. Соответственно, можно рассматривать игру N игроков, где под каждым игроком мы будем понимать отдельную волну. В начальный момент времени каждая волна имеет заданное значение энергии $E_i(0) = E_i$ и амплитуды $A_i(0) = A_i$, где $E_i(t)$ и $A_i(t)$ суть энергия и амплитуда i-ой волны в момент времени t. Допустимыми стратегиями игроков являются конкретный вид начального профиля и начальной скорости волны, с учетом ограничений на энергию и амплитуду. В вычислительных экспериментах по этим параметрам случайным образом выбирается профиль волны, что соответствует некоторым смешанным стратегиям игроков. Функция выигрыша i-ой волны в рассматриваемой игре определяется как амплитуда волны $A_i(T)$ в конечный момент $t = T$.

Введем понятие «справедливости» игры. Будем использовать обозначение: $\nu(t) = \frac{H_{max}(t)}{H_s(t)}$. Пусть пороговое значение этой функции, при котором мы регистрируем волну-убийцу, равно ν_{fw} (в наших экспериментах $\nu_{fw} = 2.1$). Игра называется справедливой, если выполнено условие: $\nu(0) < \nu_{fw}, \quad \nu(T) < \nu_{fw}$. В случае, когда выполнено условие $\nu(0) < \nu_{fw}, \quad \nu(T) \geq \nu_{fw}$, мы будем говорить, что игра несправедливая.

Несправедливость игры означает, что из относительно равных начальных условий используемые смешанные стратегии могут приводить к тому, что единичные игроки получают выигрыши, значительно превосходящие выигрыши остальных игроков. Таким образом факт возникновения волны-убийцы означает, что рассматриваемые вычислительные эксперименты приводят к «несправедливой» игре.

В Заключении приведены основные результаты диссертационной работы.

1. Построена математическая модель, основанная на полных нелинейных уравнениях гидродинамики, позволяющая исследовать поверхностные волны в океане. Установлена математическая корректность этой модели вплоть до момента обрушения волн, что позволяет исследовать волны аномально большой амплитуды.

2. Предложен новый метод исследования динамических уравнений, описывающих поверхностные волны в океане в условиях ветрового воздействия. Данный метод позволяет проводить доказательные вычисления в моделировании волн-убийц.

3. Доказана корректность численных методов для исследования поверхностных волн аномально большой амплитуды. Построенные численные методы отличаются высокой эффективностью и вычислительной устойчивостью в условиях машинной точности.

4. Проведены масштабные вычислительные эксперименты с целью исследования волн-убийц. В результате этих экспериментов получены оценки вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начального волнения, что позволяет строить методы прогноза возникновения волн-убийц.

5. Установлена устойчивость волн-убийц, как экстремального эффекта в океане, относительно внешних воздействий. В результате многочисленных вычислительных экспериментов была продемонстрирова-

на вычислительная устойчивость аномально больших поверхностных волн.

6. Предложена новая трактовка возникновения волн-убийц с помощью теоретико-игрового подхода. Это позволяет рассматривать нелинейную динамику цуга волн, как формальную игру, которая является в определенном смысле несправедливой, что выражается в возникновении одиночных аномально больших поверхностных волн.

Эти результаты составляют теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное научное достижение в области исследования нелинейных поверхностных волн в океане.

Публикации автора по теме диссертации

1. Шамин Р.В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008. 133 с.

2. Захаров В.Е., Шамин Р.В. О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. Вып. 2. С. 68-71.

3. Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Shamin R.V. How probability for freak wave formation can be found // THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL - SPECIAL TOPICS. 2010. Vol. 185. N 1. P. 113-124.

4. Шамин Р.В. Поверхностные волны на воде минимальной гладкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2010. Т. 35. С. 126-140.

5. Шамин Р.В. Разрешимость уравнений, описывающих волны минимальной гладкости // Доклады Академии наук. 2010. Т. 432. N 4. С. 458-460.

6. Шамин Р.В. Аппроксимация эволюционных дифференциальных уравнений в шкалах гильбертовых пространств // Математические заметки. 2009. Т. 85. N 2. С. 318-320.

7. Шамин Р.В. Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 28. С. 3-144.

8. Шамин Р.В. Регуляризация метода прямых в условиях машинной точности с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. N 5. С. 113-124.

9. Шамин Р.В. Моделирование поверхностных волн: статистический метод анализа разрешимости // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. Специальный выпуск 2. С. 87-93.

10. Шамин Р.В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Доклады Академии наук. 2008. Т. 418. N 5. С. 603-604.

11. Шамин Р.В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 21. С. 133-148.

12. Шамин Р.В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сибирский журнал вычислительной математики. 2006. Т. 9. N 4. С. 379-389.

13. Шамин Р.В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Доклады Академии наук. 2006. Т. 406. N 5. С. 112-113.

14. Шамин Р.В. О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Математический сборник. 2003. Т. 194. Вып. 9. С. 1411-1426.

15. Shamin R.V., Moiseeva S.N. Functional Differential Equations and Freak Waves // Functional Differential Equations. 2009. V. 16. N 4. P. 627-637.

16. Шамин Р.В. Модели ветрового волнения на основе функционально-дифференциальных уравнений // Актуальные проблемы фундаментальной и прикладной математики: Сб. науч. тр. М.: МФТИ. 2009. С. 143-149.

17. Shamin R.V. About Analytic Solvability of Nonstationary Flow of Ideal Fluid with a Free Surface // IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence. Springer Netherlands. 2008. P. 323-329.

18. Шамин Р.В., Геогджаев В.В. Статистическое исследование существования решений, описывающих поверхностные волны // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна. 2008. Воронеж: ВорГУ, 2008. С. 309-313.

19. Шамин Р.В., Дружинин В.А.. О моделировании нелинейных эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Нелинейные граничные задачи. 2006. Вып. 16. С. 226-232.

20. Shamin R.V. Spaces of Initial Data for Differential Equations in Hilbert Spaces and the Kato problem // Ulmer Seminare uber Funktionalanalysis und Differentialgleichungen. 2002. V. 7. P. 375-388.

21. Шамин Р.В. Волны-убийцы в океане: доказательные вычисления и оценка вероятности возникновения // Тезисы докладов конференции «Асимптотические методы и математическая физика», Москва, 2010. С. 56-57.

22. Шамин Р.В. О разрешимости нелинейных систем Коши-Ковалевской на конечном временном интервале // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего. - М.: Издательство «Университетская книга», 2009. С. 232-233.

23. Шамин Р.В. Волны на воде: моделирование и статистические характеристики // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара: СамГТУ, 2009. С. 214-215.

24. Shamin R.V. Freak Waves Simulation and Conclusive Simulation // The Fifth International Workshop «SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE: Achievements, Developments and Perspectives» Chernogolovka, Moscow region, RUSSIA August 2-7, 2009. P. 41.

25. Шамин Р.В. Моделирование поверхностных волн экстремальной амплитуды - волн-убийц // Abstracts of International Conference «Control and Optimization of Dynamical Systems CODS-2009», 28-30 september 2009, Tashkent, Uzbekistan. С. 113.

26. Шамин Р.В. Общие эволюционные функционально-дифференциальные уравнения // Математика, информатика, их приложения и роль

в образовании. Тезисы докладов Российской Школы-конференции с международным участием «Математика, информатика их приложения и роль в образовании» 14-18 декабря 2009 г. С. 123.

27. Шамин Р.В., Моисеева С.Н.. Статистические характеристики «волн-убийц» // Тезисы докладов Итоговой конференции по результатам реализации Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные проблемы океанологии: физика, геология, биология, экология» Москва, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 27-28 ноября 2008 г. С. 177.

28. Шамин Р.В. Использование статистических методов при исследовании разрешимости нелинейных уравнений // The Fifth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Abstracts. Moscow, Russia, August 17-24, 2008. P. 121.

29. Шамин Р.В. Об уравнениях гидродинамики со свободной поверхностью в конформных переменных // Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения. Тезисы докладов 3-й Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых. 28 июня - 3 июля 2008 года, Бийск, 2008. С. 105-106.

30. Шамин Р.В. Разрешимость систем Коши-Ковалевской на конечно временном интервале // Дифференциальные уравнения и топология: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина: тезисы докладов. - М.: ВМиК МГУ, 2008. С. 208.

31. Шамин Р.В.. Идеальная жидкость со свободной поверхностью в условиях вибрации // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна. 2008. Тезисы докладов. Воронеж, 2008. С. 147.

32. Шамин Р.В. Численное моделирование «волн-убийц» // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф. Тезисы IX Всероссийской конференции, Барнаул, 2007. С. 114.

33. Shamin R.V. Estimation time of existence water waves // BOOK OF ABSTRACTS. International Conference «Nonlinear partial differential equations». Yalta, Crimea, Ukraine, 2007. P. 65.

34. Шамин Р.В. К вопросу об оценке времени существования решений уравнений, описывающих волны на воде // Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». Тезисы докладов, 2007. С. 648.

35. Шамин Р.В. Конструктивная оценка времени существования решений уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости // Abstracts of International Conf. «Differential Equations and Related Topics» dedicated to I.G. Petrovskii, Moscow, MSU, 2007. P. 289-287.

36. Shamin R.V. About solvability and numerical simulation of nonstationary flow of ideal fluid with a free boundary // Book of abstracts. IUTAM Symposium «Hamiltonian dynamics, Vortex structures, Turbulence» (Moscow, 25-30 August 2006). P. 126-127.

37. Shamin R.V. About solvability and numerical methods of nonstationary flow of fluid with a free surface // International Conference «Tikhonov and contemporary mathematics» Moscow, Russia, June 19-25, 2006. Abstracts of session «Computational mathematics and informatics». P. 111-112.

38. Shamin R.V. About solvability and simulation equations describing motion of ideal liquid with free boundary // International Conference «Mathematical Hydrodynamics» Moscow, Russia, June 12-17, 2006. Abstracts. P. 67-68.

39. Шамин Р.В. О существовании решений нелинейной задачи движения идеальной жидкости со свободной поверхностью и численном моделировании таких задач // Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна - 2006. Тезисы докладов. Воронеж, 2006. С. 108-109.

40. Shamin R.V. About solvability and numerical simulation of nonstationary flow of incompressible fluid with a free surface // Book of Abstracts. International Conference «Nonlinear partial differential equations». Alushta, September 17-23, 2005. P. 89.

41. Шамин Р.В. О существовании гладких решений уравнений, описывающих течения идеальной жидкости со свободной поверхностью //

Abstracts of the Fourth International Conference on Differential and Functional-Differential Equations, Moscow, Russia, August 14-21, 2005. P. 13.

42. Шамин Р.В. О нестационарном течении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения, Материалы международной научной конференции ТВМНА-2005, Воронеж, изд-во ВГУ, 2005. С. 109-110.

Список используемых источников

[1] Голицын Г.С. Энергетический цикл волн на поверхности океана // Изв. АН. ФАО. 2010. Т. 46. N 1. С. 10–18.

[2] Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение в Мировом океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. — 256 с.

[3] Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс – Л:, Гидрометеоиздат, 1978. — 287 с.

[4] Дивинский Б.В., Косьян Р.Д., Подымов И.С., Пушкарев О.В. Экстремальное волнение в северо-восточной части Черного моря в феврале 2003 г. // Океанология. 2003. Т. 43. №6. С. 948–950.

[5] Дивинский Б.В., Левин Б.В., Лопатухин Л.И., Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В. Аномально высокая волна в Черном море: наблюдения и моделирование // ДАН. 2004. Т. 395. № 5. С. 690-695.

[6] Дьяченко А.И. О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. Акад. наук. 2001. Т. 376. № 1. С. 27-29.

[7] Захаров В.Е., Заславский М.М. Кинетическое уравнение и колмогоровские спектры в слаботурбулентной теории ветровых волн // Изв. АН ФАО. 1982. Т. 18. № 9. С. 970–979.

[8] Захаров В.Е., Филоненко Н.Н. Спектр энергии стохастических гравитационных волн // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. № 6. С. 1292–1295.

[9] Китайгородский С.А. Физика взаимодействия атмосферы и океана. Л. Гидрометеоиздат, 1970. — 284 с.

[10] Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. университет, 2004.

[11] Лавренов И.В. Встреча с волной-убийцей // Морской флот. 1985. № 12. С. 28–30.

[12] Лавренов И.В. Математическое моделирование ветрового волнения в пространственно-неоднородном океане. - СПБ.: Гидрометеоиздат.– 1998. — 499 с.

[13] Лонге-Хиггинс М.С. Статистический анализ случайной движущийся поверхности // В кн.: Ветровые волны. М.: ИЛ, 1962, с. 125-218.

[14] Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. — 424 с.

[15] Монин А.С., Красицкий В.П. Явления на поверхности океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 375 с.

[16] Овсянииков Л.В. К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / Акад. наук СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. - Новосибирск, 1973. - Вып.15. - С. 104-125.

[17] Океанология. Физика океана. Том 2. Гидродинамика океана (ред. В.М. Каменкович, А.С. Монин) М.: Наука, 1978. — 455 с.

[18] Пелиновский Е.Н., Хариф К. Дисперсионное сжатие волновых пакетов как механизм возникновения аномально высоких волн на поверхности океана // Изв. ФИН РФ. 2000. Т. 1. С. 50–61.

[19] Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.:Гидрометеоиздат, 1980. — 320 с.

[20] Badulin S.I., Babanin A.V., Resio D., Zakharov V. Weakly turbulent laws of wind-wave growth // J. Fluid Mech. 2007. V. 591. P. 339–378.

[21] Badulin S.I., Pushkarev A.N., Resio D., Zakharov V.E. Self-similarity of wind-driven seas // Nonl. Proc. Geophys. 2005. Vol. 12. P. 891–946.

[22] Chalikov D. Freak waves: Their occurrence and probability // Phys. Fluids. 2009. V. 21. Issue 7. P. 076602-1—076602-18.

[23] Chalikov D., Rainchik S. Coupled numerical modelling of wind and waves and the theory of the wave boundary layer // Boundary-layer meteorology. 2010. Vol. 138. № 1. P. 1–41.

[24] Chalikov D., Sheinin D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // Journ. Comp. Phys. 2005. V. 210. P. 247–273.

[25] Dyachenko A.I., Zakharov V.E. On the Formation of Freak Waves on the Surface of Deep Water // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88. № 5. С. 356–359.

[26] Dyachenko A.I., Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E. Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping)// Phys. Lett. A. 1996. V. 221. P. 73–79.

[27] Gulev S.K., Grigorieva V. Last century changes in ocean wind wave height from global visual wave data // Geophys. Res. Lett. 2004. V. 31. L24302.

[28] Hasselmann K. On the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part 1. General theory // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 12. P. 481–500.

[29] Holt M., Fullerton G., Li J.-G. Forecasting sea state with a spectral wave model // Rogue Waves 2004 Brest, 20-22 October 2004.

[30] Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. Springer, 2009. — 216 p.

[31] Zakharov V.E., Dyachenko A.I, Prokofiev A.O. Freak waves as nonlinear stage of Stokes wave modulation instability// Eur. J. Mech. B Fluids. 2006. V. 25. P. 677–692.